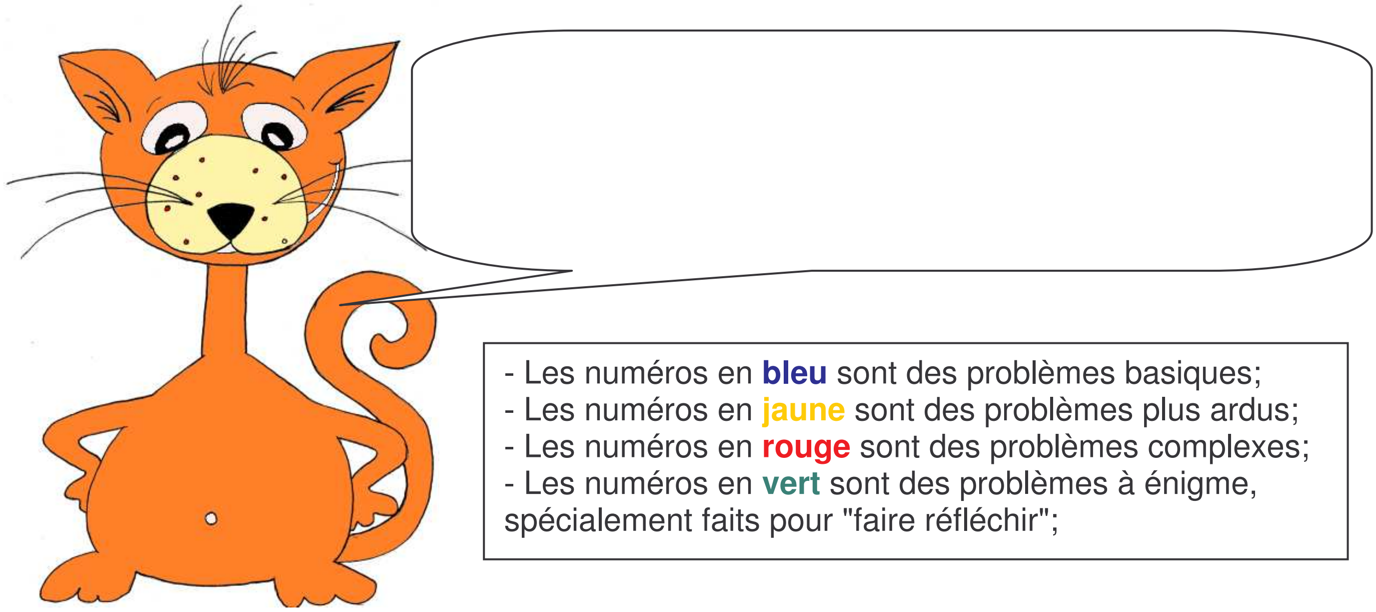
Résolution de problèmes

Réflexion 4 : Les fonctions quadratiques



- Les numéros en **bleu** sont des problèmes basiques;
- Les numéros en **jaune** sont des problèmes plus ardus;
- Les numéros en **rouge** sont des problèmes complexes;
- Les numéros en **vert** sont des problèmes à énigme, spécialement faits pour "faire réfléchir";

1-) Trouver le nombre entier dont le quintuble ajouté au triple de son carré donne 182.

2-) La différence de deux nombres est 13, et la somme de leurs carrés 1385. Quels sont ces nombres?

3-) Trouver 4 nombres consécutifs tels que si l'on divise la somme des carrés du second et du quatrième par la somme des carrés du premier et du troisième, on obtienne 13/10.

4-) La longueur d'une salle rectangulaire de 494 mètres carrés surpasse sa largeur de 7 mètres. Trouve les dimensions de la salle.

5-)La somme des âges d'un père et de son fils est de 100 ans, et le dixième du produit de leur âge surpasse l'âge du père de 180. Trouver l'âge de chacun.

6-) Le périmètre d'un rectangle surpasse de 4 cm le périmètre d'un carré, mais la surface du carré surpasse de 4 cm carrés celle du rectangle. Trouve les dimensions du rectangle, si le carré fait 110 cm de côté.

7-) Dans un nombre de 2 chiffres, le chiffre des dizaines surpasse l'autre de 1. Si on ajoute le carré de ce nombre au carré du nombre obtenu en changeant l'ordre des chiffres, la somme est de 585. Quel est ce nombre?

8-) Le périmètre d'un rectangle est de 500 verges, et sa surface est de 14 400 verges carrées. Trouve ses dimensions.

9-) Trouve la mesure du rayon d'un cercle dont la surface se trouverait doublée si ce rayon était augmenté de 1 unité.

10-) Jean-Yves et Marc-André partent en bicyclette, à la même heure, de 2 villes éloignées de 320 km. Jen-Yves fait 8 km de plus par jour que Marc-André, et le nombre de jours qu'il leur faudra pour se rencontrer est égal à la moitié du nombre de kilomètres que Marc-André fait par jour. Trouve la distance que chacun d'eux parcourra avant la rencontre.

11-) Une roue de voiture ayant 15 dm de circonférence fait un tour en un certain nombre de secondes. S'il lui fallait une seconde de plus pour faire un tour, la voiture ferait 1440 m de moins par heure. Trouve le temps qu'il faut à la roue pour faire un tour.

12-) Sandra et Michel s'entraînent à lancer une balle. Michel, typiquement macho et ne voulant pas perdre contre une fille qu'il sait plus forte que lui, se place 5 mètres en avant d'elle, au point (5,0) d'un plan cartésien, et il tire de toutes ses forces. La balle décrit une trajectoire parabolique et touche le sol précisément au point (110,0). Lorsque Sandra lance à son tour, sa balle parcourt une distance au sol 1,5 fois plus grande que celle de Michel. De plus, on sait que la balle de Michel a frôlé un oiseau au point (45,13), que les trajectoires des deux balles se sont croisées précisément à x=594 681/8000 et que l'âge de Michel est égal à celui de Sandra multiplié par 2 et soustrait de 16. Quelle est la hauteur maximale qu'a atteint la balle de Sandra?

13-)Pour construire une nouvelle route dans les Alpes, les ingénieurs ont prévu de bâtir un pont au-dessus d'un large canyon. Ce canyon peut être représenté par la fonction quadratique :
f(x) = 0,1x^2 – 10x + 130 si x € [0,100]
Les ingénieurs se demandent la longueur qu'aura le pont si celui-ci est constamment à la même altitude. Calcule-la.

14-) On peut simuler sur Terre la gravitation nulle qui règne dans l'espace. Pour se faire, un avion suit une trajectoire parabolique. Lorsqu'il redescend, la gravité en son intérieur est ainsi annulée. Pour éviter les accidents, le pilote doit cependant faire remonter l'avion lorsque celui-ci est à moins de 120 m du sol. Lors d'un de ces vols, l'avion suit la parabole représentée par la fonction :
f(d) = -0,1d^2 + 10d – 50

où d représente la distance au sol parcourue par l'avion en km, et f(d) l'altitude de l'avion en mètres. Lors de la descente, la distance au sol, en kilomètres, parcourue par l'avion correspond à la fonction :

D(t) = 0,0055t^2

Où t est le temps en secondes écoulé depuis le début de la descente. Après exactemetn 19,07 secondes de descente, l'ordinateur fait remonter l'avion pour éviter qu'il ne heurte une colline, collision qui aurait eu lieu exactement au sommet de la colline (colline pouvant être représentée par une parabole), et à 40 mètres d'altitude. On sait aussi qu'une antenne située sur le flanc de cette colline est aux coordonnées (92,38). Quelle est la longueur de la base de cette colline.

Corrigé des problèmes

#1 : Trouver le nombre entier dont le quintuble ajouté au triple de son carré donne 182.

Soit x le nombre demandé :

Puisque le triple du carré d'un nombre est 3x², et qu'on ajoute son quintuple, soit 5x :

$$3x^2 + 5x = 182$$

$$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 5x - 182$$

On trouve l'ensemble-solution de cette équation

$a = 3$
$b = 5$
$c = -182$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(5) + \sqrt{(5)^2 - 4(3)(-182)}}{2(3)} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-(5) - \sqrt{(5)^2 - 4(3)(-182)}}{2(3)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 2184}}{6} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 2184}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-5 + 47}{6} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-5 - 47}{6}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{42}{6} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-52}{6}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 7 \quad \wedge \quad x_2 = -26/3$$

Puisque l'on cherche un nombre entier, je rejete x_2.

Réponse : Le nombre demandé est 7

#2 : La différence de deux nombres est 13, et la somme de leurs carrés 1385. Quels sont ces nombres?

x : Plus petit des nombres recherchés

$y=(x+13)$: Plus grand des nombres recherchés

On met chaque nombre au carré :

$$x^2=x^2$$

$$y^2=(x+13)^2=(x+13)(x+13)=x^2+26x+169$$

La somme de leurs carrés est de 1385, donc :

$$x^2+y^2=1385$$

$$\Leftrightarrow x^2+(x^2+26x+169)=1385$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+26x+169=1385$$

$$\Leftrightarrow 0=2x^2+26x-1216$$

On trouve l'ensemble – solution de cette équation

$$a=2$$
$$b=26$$
$$c=-1216$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{si } a\neq 0 \wedge b^2\geq 4ac$$

$$x_1=\frac{-(26)+\sqrt{(26)^2-4(2)(-1216)}}{2(2)} \quad \wedge \quad x_2=\frac{-(26)+\sqrt{(26)^2-4(2)(-1216)}}{2(2)}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{-26+\sqrt{676+9728}}{4} \quad \wedge \quad x_2=\frac{-26-\sqrt{676+9728}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{-26+102}{4} \quad \wedge \quad x_2=\frac{-26-102}{4}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{76}{4} \quad \wedge \quad x_2=\frac{-128}{4}$$

$$\Leftrightarrow x_1=19 \quad \wedge \quad x_2=-32$$

Si x = 19, alors :

$$y=x+13$$

On pose x = 19 :

$$y=19+13$$

$$\Leftrightarrow y=32$$

Si x = -32, alors :

$$y=x+13$$

On pose x = -32 :

$$y=-32+13$$

$$\Leftrightarrow y=-19$$

Réponse : Les nombres demandés sont donc 19 et 32 OU -32 et -19.

#3 : Trouver 4 nombres consécutifs tels que si l'on divise la somme des carrés du second et du quatrième par la somme des carrés du premier et du troisième, on obtienne 13/10.

x : Plus petit des nombres recherchés

$y=(x+1)$: Deuxième nombre recherché

$z=(x+2)$: Troisième nombre recherché

$w=(x+3)$: Quatrième nombre recherché

Puisque la division de la somme des carrés du 2e et 4e nombre par la somme des carrés du 1er et 3e nombre donne $^{13}/_{10}$:

$$\frac{w^2+y^2}{x^2+z^2}=\frac{13}{10}$$

$$\frac{(x+3)^2+(x+1)^2}{x^2+(x+2)^2}=\frac{13}{10}$$

On veut simplifier cette expression algébrique pour obtenir une équation du second degré égale à 0 :

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+6x+9)+(x^2+2x+1)}{x^2+(x^2+4x+4)}=\frac{13}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+8x+10}{2x^2+4x+4}=\frac{13}{10}$$

$$\Leftrightarrow 10(2x^2+8x+10)=13(2x^2+4x+4)$$

$$\Leftrightarrow 20x^2+80x+100=26x^2+52x+52$$

$$\Leftrightarrow 0=6x^2-28x-48$$

On trouve l'ensemble – solution de cette équation

$a=6$
$b=-28$
$c=-48$

(suite à la page suivante)

(suite du #3)

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(-28)+\sqrt{(-28)^2-4(6)(-48)}}{2(6)} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-(-28)-\sqrt{(-28)^2-4(6)(-48)}}{2(6)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{28+\sqrt{784+1152}}{12} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{28-\sqrt{784+1152}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{28+44}{12} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{28-44}{12}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{28+44}{12} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{28-44}{12}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{72}{12} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-16}{12}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 6 \quad \wedge \quad x_2 = {}^{-4}\!/_{3}$$

Je rejete $x_2 = {}^{-4}\!/_{3}$, car ce n'est pas un nombre entier (je dois avoir 4 nombres consécutifs

$\therefore$ x = 6

$$y = x+1 = 6+1 = 7$$

$$z = x+2 = 6+2 = 8$$

$$w = x+3 = 6+3 = 9$$

Réponse : Les quatre nombres sont 6, 7, 8 et 9.

#4 : La longueur d'une salle rectangulaire de 494 mètres carrés surpasse sa largeur de 7 mètres. Trouve les dimensions de la salle.

x : Largeur de la salle en m.

$y = x + 7$: Longueur de la salle en m.

$A = 494$: Aire de la salle en m^2

Puisque la salle est rectangulaire :

$$A = b \bullet h$$
$$A = x \bullet y$$
$$494 = x(x+7)$$
$$\Leftrightarrow 494 = x^2 + 7x$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 7x - 494$$

On trouve l'ensemble-solution de cette équation

$$a = 1$$
$$b = 7$$
$$c = -494$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(7)+\sqrt{(7)^2-4(1)(-494)}}{2(1)} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-(7)-\sqrt{(7)^2-4(1)(-494)}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{49+1976}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-7-\sqrt{49+1976}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-7+45}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-7-45}{2}$$

$$x_1 = 19 \quad \wedge \quad x_2 = -26$$

Je rejete $x_2 = -26$, car ce n'est pas un nombre positif

$\therefore x = 19$

$$y = x + 7 = 19 + 7 = 26$$

Réponse : La salle fait 26 mètres de longueur par 19 mètres de largeur.

#5 : La somme des âges d'un père et de son fils est de 100 ans, et le dixième du produit de leur âge surpasse l'âge du père de 180. Trouver l'âge de chacun.

x : Âge du père en années

$y = 100 - x$: Âge du fils en années

Puisque le produit de leurs âges surpasse celui du père de 180 :

$$\frac{1}{10}xy = x + 180$$

$$\frac{1}{10}x(x-100) = x + 180$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}(x^2 - 100x) = x + 180$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{10} - 9x - 180 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 90x - 1800$$

On trouve l'ensemble-solution de cette équation

$a = 1$
$b = -90$
$c = -1800$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(-90) + \sqrt{(-90)^2 - 4(1)(-1800)}}{2(1)} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-(-90) - \sqrt{(-90)^2 - 4(1)(-1800)}}{2(1)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{90 + \sqrt{8100 - 7200}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{90 - \sqrt{8100 - 7200}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{90 + 30}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{90 - 30}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 60 \quad \wedge \quad x_2 = 30$$

Je rejete $x_2 = 30$, parce que l'âge du fils est égal à 100 soustrait de l'âge du père;

Si le père avait 30 ans, alors son fils aurait 100 - 30 = 70 ans

Le fils ne peut évidemment être plus âgé que son père, donc je rejete x_2

$\therefore x = 60$

$$y = 100 - x = 100 - 60 = 40$$

Réponse : Le père a 60 ans, son fils 40 ans.

#6 : Le périmètre d'un rectangle surpasse de 4 cm le périmètre d'un carré, mais la surface du carré surpasse celle du rectangle de 4 cm^2. Trouve les dimensions du rectangle, si le carré a un côté de 110 cm.

x : Mesure de la longueur du rectangle en cm.

y : Mesure de la largeur du rectangle en cm.

$c = 110$: Mesure du côté du carré en cm.

$P_C = 4c$: Mesure du périmètre du carré en cm.

$A_C = c^2$: Mesure de l'aire du carré en cm^2

$P_R = P_C + 4 = 2x + 2y$: Mesure du périmètre du rectangle en cm.

$A_R = A_C - 4 = xy$: Mesure de l'aire du rectangle en cm^2

On calcule le périmètre et l'aire du carré

$P_C = 4c$

$P_C = 4 \bullet 110$

$\Leftrightarrow P_C = 440cm$

$A_C = c^2$

$A_C = (110)^2$

$\Leftrightarrow A_C = 12\ 100\ cm^2$

Avec ces mesures, on peut calculer le périmètre du rectangle :

$P_R = P_C + 4$

$P_R = 440 + 4$

$\Leftrightarrow P_R = 444cm$

Puisque on connaît la formule du périmètre d'un rectangle :

$P_R = 2x + 2y$

$444 = 2x + 2y$

$\Leftrightarrow \dfrac{444}{2} = \dfrac{2x + 2y}{2}$

$\Leftrightarrow 222 = x + y$

$\Leftrightarrow y = 222 - x$

(suite du #6)

On peut maintenant comparer les aires du rectangle et du carré :

$$A_R = A_C - 4$$
$$xy = 12\ 100 - 4$$
$$x(222 - x) = 12\ 100 - 4$$
$$\Leftrightarrow 222x - x^2 = 12\ 096$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 222x + 12\ 096$$

On trouve l'ensemble-solution de cette équation

$$a = 1$$
$$b = -222$$
$$c = 12096$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(-222) + \sqrt{(-222)^2 - 4(1)(12096)}}{2(1)} \wedge x_2 = \frac{-(-222) - \sqrt{(-222)^2 - 4(1)(12096)}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{222 + \sqrt{49284 - 48384}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{222 - \sqrt{49284 - 48384}}{2}$$

$$x_1 = \frac{222 + 30}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{222 - 30}{2}$$

$$x_1 = 126 \quad \wedge \quad x_2 = 96$$

Puisque on a en fait factorisé l'aire du rectangle, on obtient directement les dimensions de celui-ci.

Réponse : Le rectangle fait 126 cm de longueur par 96 cm de largeur.

#7 : Dans un nombre de 2 chiffres, le chiffre des dizaines surpasse l'autre de 1. Si on ajoute le carré de ce nombre au carré du nombre obtenu en changeant l'ordre des chiffres, la somme est de 585. Quel est ce nombre?

x : Chiffre des unités

$y = x+1$: Chiffre des dizaines

V : Valeur du nombre

V_i : Valeur du nombre avec les chiffres intervertis

Il y a ici quelques subtilités à saisir :

D'abord, il faut trouver, en connaissant la valeur de ses chiffres, la valeur du nombre :
Puisque x représente le chiffre des unités et que y est le chiffre des dizaines :

$$V = 10y + x$$
$$V = 10(x+1) + x$$
$$\Leftrightarrow V = 10x + 10 + x$$
$$\Leftrightarrow V = 11x + 10$$

Maintenant, faisons le contraire et supposons que x est le chiffre des dizaines
et y celui des unités :

$$V_i = 10x + y$$
$$V_i = 10x + (x+1)$$
$$\Leftrightarrow V_i = 11x + 1$$

Puisque l'on dit que si l'on ajoute le carré du nombre au carré du nombre obtenu en changeant les chiffres de place, on obtient 585 :

$$V^2 + V_i^2 = 585$$
$$(11x+10)^2 + (11x+1)^2 = 585$$
$$\Leftrightarrow (121x^2 + 220x + 100) + (121x^2 + 22x + 1) = 585$$
$$\Leftrightarrow 242x^2 + 242x + 101 = 585$$
$$\Leftrightarrow 242x^2 + 242x - 484 = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 2$$

(suite à la page suivante)

(suite du #7)

On trouve l'ensemble – solution de cette équation

$a = 1$
$b = 1$
$c = -2$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(1) + \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-(1) - \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+8}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-1+3}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-1-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = -2$$

On va ici utiliser X_1, mais utiliser X_2 ne poserait pas de problème, on aurait simplement la même réponse, mais négative.

$y = x + 1$

$y = 1 + 1 = 2$

Réponse : Le nombre recherché est donc 21, où -21.

#8 : Le périmètre d'un rectangle est de 500 verges, et sa surface est de 14 400 verges carrées. Trouve ses dimensions.

x : Longueur du rectangle en verges

y : Largeur du rectangle en verges

$P = 500$: Périmètre du rectangle en verges

$A = 14400$: Aire du rectangle en verges carrées

On connaît les formules d'aire et de périmètre pour un rectangle :

$$P = 2x + 2y$$
$$500 = 2x + 2y$$
$$\Leftrightarrow 250 = x + y$$
$$\Leftrightarrow y = 250 - x$$
$$A = xy$$
$$14400 = x(250 - x)$$
$$\Leftrightarrow 14400 = 250x - x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 250x + 14400 = 0$$

On trouve l'ensemble-solution de cette équation

$$a = 1$$
$$b = -250$$
$$c = 14400$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(-250) + \sqrt{(-250)^2 - 4(1)(14400)}}{2(1)} \wedge x_2 = \frac{-(-250) - \sqrt{(-250)^2 - 4(1)(14400)}}{2(1)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{250 + \sqrt{62500 - 57600}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{250 - \sqrt{62500 - 57600}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{250 + 70}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{250 - 70}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 160 \quad \wedge \quad x_2 = 90$$

Puisque on a en fait factorisé l'aire du rectangle, on obtient directement les dimensions de celui-ci.

Réponse : Le rectangle fait 160 verges par 90 verges.

#9 : Trouve la mesure du rayon d'un cercle dont la surface se trouverait doublée si ce rayon était augmenté de 1 unité.

x : Rayon du cercle recherché en u.

On applique maintenant la formule de l'aire d'un cercle A = πr^2 :
L'aire du cercle résultant de l'augmentation du rayon de 1 serait égal à
2 fois l'aire originale du cercle, donc :

$$\pi(x+1)^2 = 2\pi x^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2-2x-1$$

On trouve l'ensemble-solution de cette équation

$a = 1$
$b = -2$
$c = -1$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$
$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{2+\sqrt{4+4}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{4+4}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1+\frac{\sqrt{8}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = 1-\frac{\sqrt{8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1+\sqrt{8}\bullet 0{,}5 \quad \wedge \quad x_2 = 1-\sqrt{8}\bullet 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 1+\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = 1-\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 \approx 2{,}41 \quad \wedge \quad x_2 \approx -0{,}41$$

Je rejete X_2, car il est négatif, donc X = $1+\sqrt{2} \approx 2{,}41u$.

Réponse : Le rayon du cercle est d'environ 2,41 u.

#10 : Jean-Yves et Marc-André partent en bicyclette, à la même heure, de 2 villes éloignées de 320 km. Jen-Yves fait 8 km de plus par jour que Marc-André, et le nombre de jours qu'il leur faudra pour se rencontrer est égal à la moitié du nombre de kilomètres que Marc-André fait par jour. Trouve la distance que chacun d'eux parcourra avant la rencontre.

x : Distance parcourue par Marc-André en 1 jour, en km

$y = x + 8$: Distance parcourue par Jean-Yves en 1 jour, en km

On veut trouver la distance que parcours Marc - André en 1 jour, puisque on pourra alors savoir le nombre de jours qu'il leur a fallu pour se rencontrer ($x/2$) :

Pour trouver le nombre de km parcourus par Marc - André, nous savons qu'ensemble, Marc - André et Jean - Yves parcoureront évidemment la totalité du trajet, soit 320 km.

Chacun fait donc un certain nombre de kilomètres par jour; nous savons que la somme de leurs kilométrages par jour multipliée par le nombre de jours qu'il voyagent donnera 320, donc :

$$(x+y)\bullet x/2 = 320$$

$$(x+(x+8))\bullet x/2 = 320$$

$$\Leftrightarrow (2x+8)\bullet x = 640$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x = 640$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 4x - 320$$

On trouve l'ensemble - solution de cette équation

$a = 1$
$b = 4$
$c = -320$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{si } a \neq 0 \wedge b^2 \geq 4ac$$

$$x_1 = \frac{-(4)+\sqrt{(4)^2-4(1)(-320)}}{2(1)} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-(4)-\sqrt{(4)^2-4(1)(-320)}}{2(1)}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-4+\sqrt{16+1280}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-4-\sqrt{16+1280}}{2}$$

(suite à la page suivante)

(suite du #10)

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-4+\sqrt{16+1280}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-4-\sqrt{16+1280}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-4+36}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-4-36}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 16 \quad \wedge \quad x_2 = -20$$

Je rejete X_2, car il est négatif, et que la distance parcourue en une journée est positive.

$\therefore$ x = 16

$$y = x+8$$

$$y = 16+8 = 24\ km$$

On peut maintenant calculer la distance parcourue par chacun, en sachant que le nombre de jours avant leur rencontre est égal à la moitié de x :

Marc-André parcourt $16 \times {}^{16}\!/_{2} = 128$ km

Jean-Yves parcourt $24 \times {}^{16}\!/_{2} = 192$ km

#11 : Une roue de voiture ayant 15 dm de circonférence fait un tour en un certain nombre de secondes. S'il lui fallait une seconde de plus pour faire un tour, la voiture ferait 1440 m de moins par heure. Trouve le temps qu'il faut à la roue pour faire un tour.

x : Temps que prend la roue pour faire un tour en sec.

La distance que parcourt la roue (donc la voiture) est égale à sa circonférence divisée par le temps d'une rotation. Puisque que l'on veut avoir pour 1 heure, on va multiplier ce résultat par le nombre de secondes qu'il y a dans une heure (3600) :

$$\frac{15}{x}\times 3600=\frac{15}{(x+1)}\times 3600+14400 \quad \text{si } x\neq 0 \wedge x\neq -1$$

On peut mettre la deuxième égalité, car si x est augmenté de 1, alors la distance parcourue sera diminuée de 1440 m. (il faut ici convertir en dm, donc 14400 dm.). Donc, nous allons transformer cette équation pour obtenir une quadratique (c'est le but de l'exercice!) :

$$\frac{15}{x}\times 3600=\frac{15}{(x+1)}\times 3600+14400$$

$$\Leftrightarrow 15\times 3600=\frac{15x}{(x+1)}\times 3600+14400x$$

$$\Leftrightarrow 54000(x+1)=15x\times 3600+14400x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 54000=14400x^2+14400x$$

$$\Leftrightarrow 0=144x^2+144x-540$$

On trouve l'ensemble-solution de cette équation

$a=144$
$b=144$
$c=-540$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \wedge x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{si } a\neq 0 \wedge b^2\geq 4ac$$

$$x_1=\frac{-(144)+\sqrt{(144)^2-4(144)(-540)}}{2(144)} \wedge x_2=\frac{-(144)-\sqrt{(144)^2-4(144)(-540)}}{2(144)}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{-144+\sqrt{20736+311040}}{288} \wedge x_2=\frac{-144-\sqrt{20736+311040}}{288}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{-144+576}{288} \wedge x_2=\frac{-144-576}{288}$$

$$\Leftrightarrow x_1={}^{3}\!/_{2} \wedge x_2={}^{-5}\!/_{2}$$

Je rejete X_2, car il est négatif. Donc la réponse de 3/2 secondes par tour.

Réponse : La roue fait un tour en 1,5 secondes.

#12 : Sandra et Michel s'entraînent à lancer une balle. Michel, typiquement macho et ne voulant pas perdre contre une fille qu'il sait plus forte que lui, se place 5 mètres en avant d'elle, au point (5,0) d'un plan cartésien, et il tire de toutes ses forces. La balle décrit une trajectoire parabolique et touche le sol précisément au point (110,0). Lorsque Sandra lance à son tour, sa balle parcourt une distance au sol 1,5 fois plus grande que celle de Michel. De plus, on sait que la balle de Michel a frôlé un oiseau au point (45,13), que les trajectoires des deux balles se sont croisées précisément à x=594 681/8000 et que l'âge de Michel est égal à celui de Sandra multiplié par 2 et soustrait de 16. Quelle est la hauteur maximale qu'a atteint la balle de Sandra?

D_M : Distance au sol qu'a parcouru la balle de Michel en m.

D_S : Distance au sol qu'a parcouru la balle de Sandra en m.

On définit les points qu'on va utiliser pour les calculs

$A(x_1,0)=A(5,0)$

$B(x_2,0)=B(110,0)$

$C(x_c,y_c)=C(45,13)$

On calcule les distances qu'ont parcouru les balles

$D_M=X_2-X_1$

$D_M=110-5$

$\Leftrightarrow D_M=105\ m.$

$D_S=1,5D_M$

$D_S=1,5\bullet 105$

$\Leftrightarrow D_S=157,5\ m.$

On peut, avec ses zéros, avoir l'équation de la parabole de la trajectoire de la balle de Michel

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

$f(x)=a(x-5)(x-110)$

$C(45,13)\in Parabole$ car il vérifie l'équation

$f(x)=a(x-5)(x-110)$

(suite à la page suivante)

(suite du #12)

On pose f(x)=13 $\wedge$ x=45

$$13 = a((45)-5)((45)-110)$$
$$\Leftrightarrow 13 = a(40)(^{-}65)$$
$$\Leftrightarrow 13 = {}^{-}2600a$$
$$\Leftrightarrow a = {}^{-1}\!/_{200}$$

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$f(x) = {}^{-1}\!/_{200}(x-5)(x-110)$$

Maintenant que l'on connait la règle, on peut calculer l'ordonnée du point situé à x = $\frac{594\ 681}{8000}$:

$$f(x) = {}^{-1}\!/_{200}(x-5)(x-110)$$

On pose x= $^{594\ 681}\!/_{8000}$

$$f(\frac{594681}{8000}) = {}^{-1}\!/_{200}(\frac{594681}{8000}-5)(\frac{594681}{8000}-110)$$
$$\Leftrightarrow f(\frac{594681}{8000}) = {}^{-1}\!/_{200}(\frac{554681}{8000})(\frac{^{-}285319}{8000}-110)$$
$$\Leftrightarrow f(\frac{594681}{8000}) \approx 12{,}36$$

Si la distance entre les zéros de la parabole formée par la balle de Sandra est de 157,5 m et que son premier zéro est à (0,0), alors on peut trouver X_2 ainsi :

$$X_2 = X_1 + 157{,}5$$
$$X_2 = 0 + 157{,}5 = 157{,}5$$

On peut, avec ses zéros, avoir l'équation de la parabole de la trajectoire de la balle de Sandra

$$g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$g(x) = a(x-0)(x-157{,}5)$$
$$\Leftrightarrow g(x) = a(x^2 - 157{,}5x)$$

$D(^{594681}\!/_{8000};12{,}36) \in \mathit{Parabole}$ car il vérifie les 2 équations

(suite à la page suivante)

(suite du #12)

$D(594681/8000 ; 12,36) \in Parabole$ car il vérifie les 2 équations

$g(x) = a(x^2 - 157,5x)$

On pose x= $594\ 681/8000 \ \wedge\ g(x) \approx 12,36$

$12,36 \approx a((594\ 681/8000)^2 - 157,5(594\ 681/8000))$

$\Leftrightarrow 12,36 \approx a(36\ 552\ 577/6615 - 11707,78)$

$\Leftrightarrow 12,36 \approx -6182,07a$

$\Leftrightarrow a \approx -0,002$

$g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$g(x) = -0,002(x - 0)(x - 157,5)$

$\Leftrightarrow g(x) = -0,002x^2 + 0,315x$

Avec la règle g(x), nous allons pouvoir trouver le sommet de la fonction :

$a = -0,002$
$b = 0,315$
$c = 0$

$$h = \frac{-b}{2a} \quad \wedge \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{si } a \neq 0$$

$$h = \frac{-(0,315)}{2(-0,002)} \quad \wedge \quad k = \frac{4(-0,002)(0) - (0,315)^2}{4(-0,002)}$$

$$\Leftrightarrow h = 78,75 \quad \wedge \quad k = 3969/320 \approx 12,40$$

Réponse : Le sommet de la parabole représentant la trajectoire de la balle de Sandra est S(h,k) = S(78,75; $3969/320$)

#13 : Pour construire une nouvelle route dans les Alpes, les ingénieurs ont prévu de bâtir un pont au-dessus d'un large canyon. Ce canyon peut être représenté par la fonction quadratique :

$f(x) = 0,1x^2 - 10x + 130$ si $x \in [0,100]$

Les ingénieurs se demandent la longueur qu'aura le pont si celui-ci est constamment à la même altitude. Calcule-la.

